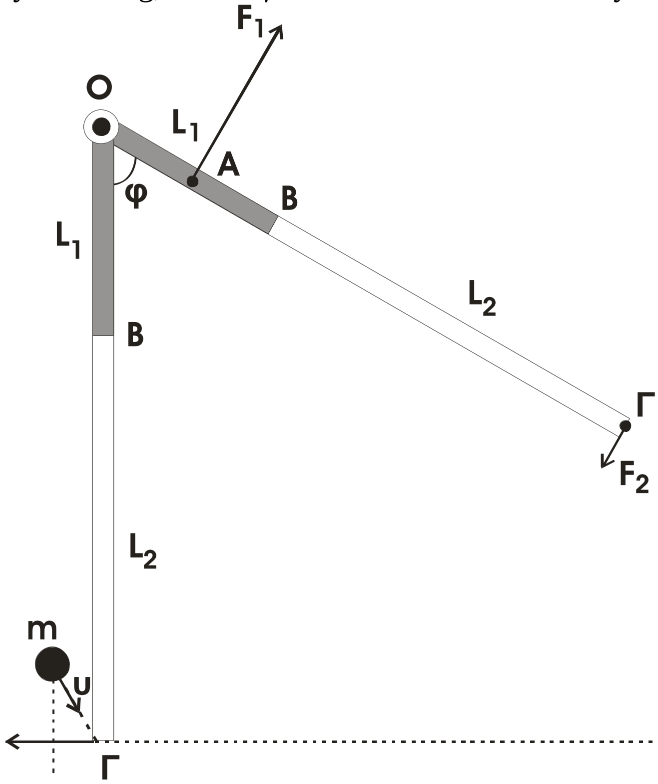
Δυο _ράβδοι

Το στερεό του σχήματος αποτελείται από δυο ράβδους. Την (ΟΒ)=L_1=0,2m με μάζα m_1=3Kg και την (ΒΓ)=L_2=0,6m με μάζα m_2=1Kg, που συγκολλούνται στο κοινό τους άκρο Β. Κάθετα στις δυο ράβδους ασκούνται οι δυνάμεις F_1=16N και F_2=2N με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Η F_1 εφαρμόζεται στο άκρο Γ της ΒΓ και η F_2 στο μέσο Α της ΟΒ. Λόγω τριβών με τον άξονα περιστροφής το σύστημα ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία φ=60^0 με την κατακόρυφο.



α) Ποια είναι η συνολική ροπή που ασκείται στη ράβδο από την τριβή με τον άξονα περιστροφής;

β) Ποια είναι η συνολική δύναμη που ασκείται από τον άξονα περιστροφής στη ράβδο όταν αυτή ισορροπεί;

γ) Ρίχνουμε λίγο λαδάκι και μηδενίζουμε τις τριβές με τον άξονα περιστροφής οπότε το σύστημα ξεκινά να περιστρέφεται από την ηρεμία. Τότε να υπολογιστεί το έργο όλων των δυνάμεων και η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μόλις αυτό γίνει κατακόρυφο για πρώτη φορά.

δ) Αν εκείνη τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφο, συγκρούεται ελαστικά στο κατώτερο άκρο του, με σημειακή μάζα m=1Kg που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=10m/s σχηματίζοντας με την κατακόρυφο, γωνία 30^0, και αν θεωρήσουμε τις επιφάνειες λείες, τότε:

i) Να υπολογιστούν η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου καθώς και η ταχύτητα της μάζας m αμέσως μετά την κρούση.

ii) Πόση είναι η μέγιστη ενέργεια παροδικής παραμόρφωσης;

ε) Πόση είναι η αντίδραση από τον άξονα στήριξης αμέσως μετά την κρούση;

Δίνεται $\sqrt{3}$=1,7 και η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς το Κ.Μ της είναι $I=\frac{1}{12}\cdot m\cdot L^2$.

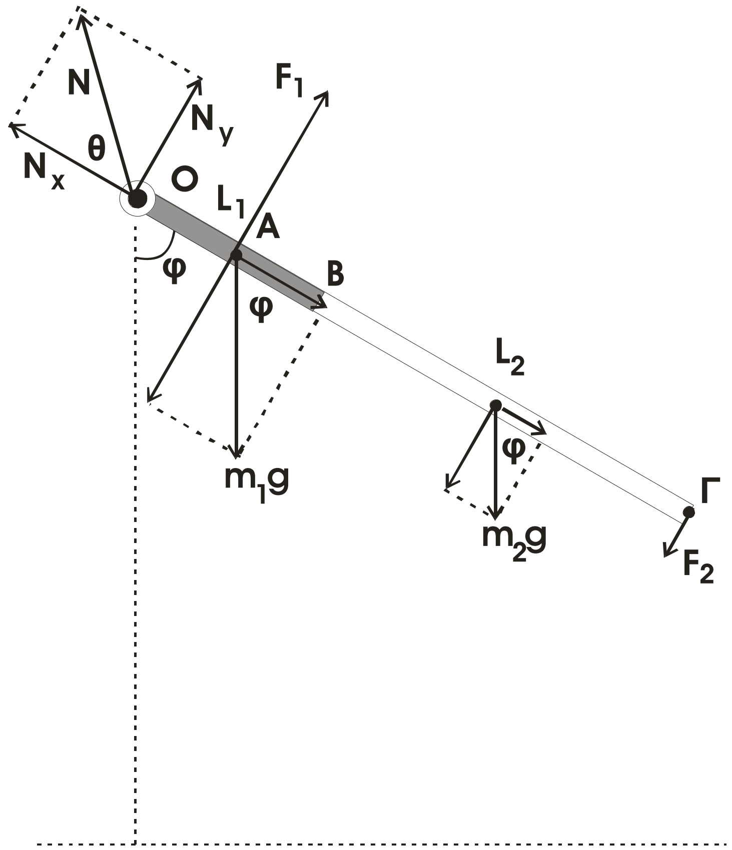
Λύση:

α) Ισχύει:

$\Sigma\tau_{(o)}=0 \Rightarrow -F_1\dfrac{L_1}{2}+F_2(L_1+L_2)+m_1\cdot g\cdot ημφ\cdot\dfrac{L_1}{2}+m_2\cdot g\cdot ημφ\cdot(L_1+\dfrac{L_2}{2})+\tau_T=0\Rightarrow$

$\Rightarrow -1{,}6+1{,}6+1{,}5\cdot\sqrt{3}+2{,}5\cdot\sqrt{3}+\tau_T=0\Rightarrow \tau_T=-4\cdot\sqrt{3}\,N\cdot m.$

β) $\Sigma F_x=0\Rightarrow N_x-m_1\cdot g\cdot συνφ-m_2\cdot g\cdot συνφ=0\Rightarrow N_x=15+5\Rightarrow N_x=20N$. Ακόμη $\Sigma F_y=0\Rightarrow N_y-m_1\cdot g\cdot ημφ-m_2\cdot g\cdot ημφ-F_2+F_1=0\Rightarrow N_y-15\cdot\sqrt{3}-5\cdot\sqrt{3}-2+16=0\Rightarrow$
$\Rightarrow N_y=20\cdot\sqrt{3}-14\Rightarrow N_y=34-14\Rightarrow N_y=20N$. Άρα $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}\Rightarrow N=20\cdot\sqrt{2}\,N$ με $\theta=45^0$.



γ) $h_1=L_1+L_2-\dfrac{L_1}{2}\cdot συνφ\Rightarrow h_1=0{,}8-0{,}05\Rightarrow h_1=0{,}75m$

$h'_1=L_2+\dfrac{L_1}{2}\Rightarrow h'_1=0{,}7m$ ακόμη $h_2=L_1+L_2-(L_1+\dfrac{L_2}{2})\cdot συνφ\Rightarrow h_2=0{,}8-0{,}25\Rightarrow h_2=0{,}55m$

και $h'_2=\dfrac{L_2}{2}\Rightarrow h'_2=0{,}3m.$

Τότε $W_{w1}=m_1\cdot g\cdot(h_1-h'_1)=30\cdot 0{,}05=1{,}5J$ και $W_{w2}=m_2\cdot g\cdot(h_2-h'_2)=10\cdot 0{,}25=2{,}5J.$

Ακόμη $W_{F1}=-F_1\cdot\dfrac{L_1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}=-16\cdot 0{,}1\cdot\dfrac{\pi}{3}=-1{,}6\cdot\dfrac{\pi}{3}J$ και

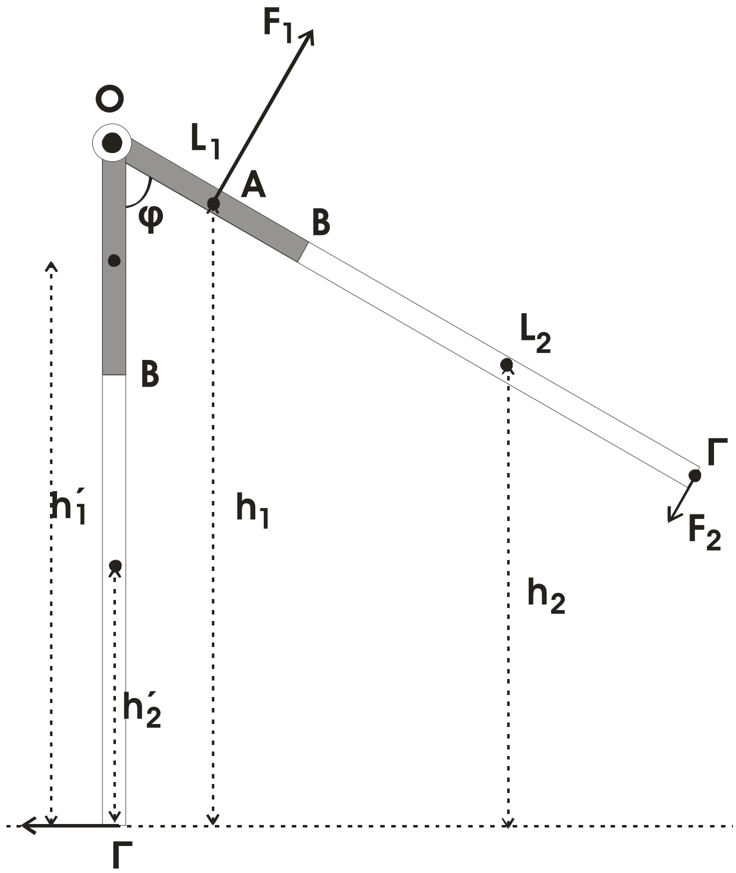
$W_{F2}=F_2\cdot(L_1+L_2)\cdot\dfrac{\pi}{3}=2\cdot 0{,}8\cdot\dfrac{\pi}{3}=1{,}6\cdot\dfrac{\pi}{3}J$ και $W_{ολ}=4J.$

Παρατήρηση: Για το κέντρο μάζας του συστήματος που βρίσκεται στο σημείο B είναι $h_1=L_1+L_2-L_1\cdot συν60^0=0{,}8-0{,}1=0{,}7m$ και $h_2=L_2=0{,}6m$ και
$W_w=(m_1+m_2)\cdot g\cdot \Delta h=40\cdot 0{,}1=4J$.

Ακόμη $I_1=\frac{1}{3}\cdot m_1\cdot L_1^2=0{,}04Kg\cdot m^2$ και

$I_2=\frac{1}{12}\cdot m_2\cdot L_2^2+m_2\cdot(L_1+\frac{L_2}{2})^2=0{,}03+0{,}25=0{,}28\ Kg\cdot m^2$ άρα $I=0{,}04+0{,}28=0{,}32\ Kg\cdot m^2$.

Θ.Μ.Κ.Ε:$K_{τελ}=W_{ολ}\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2= W_{ολ}\Rightarrow\omega^2=25\Rightarrow\omega=5rad/s$.

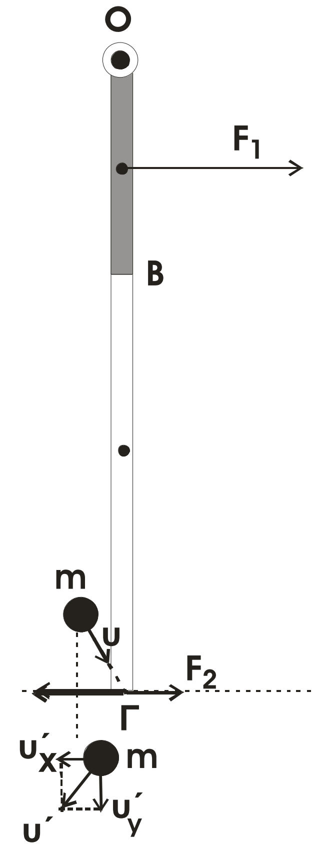


δ) i) Θεωρούμε τις επιφάνειες λείες, τότε η κατακόρυφη συνιστώσα $\upsilon_y = \upsilon_y' = \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 5\sqrt{3}$ m/s παραμένει αμετάβλητη σε όλη τη διάρκεια της κρούσης. Λόγω της μικρής διάρκειας της κρούσης η συμβολή του βάρους είναι ασήμαντη.

Είναι $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ άρα ισχύει η Α.Δ.Σ:

$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu 30^0 (L_1+L_2) - I \cdot \omega = I \cdot \omega' + m\upsilon_x' \cdot (L_1+L_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 0{,}32 \cdot 5 = 0{,}32 \cdot \omega' + 0{,}8 \cdot \upsilon_x' \Rightarrow \upsilon_x' + 0{,}4 \cdot \omega' = 3 \Rightarrow \omega' = \dfrac{3-\upsilon_x'}{0{,}4}$



και Α.Δ.Μ.Ε: $\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 + \dfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon'^2 + \dfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega'^2$, όπου

$\upsilon'^2 = \upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 = \upsilon_x'^2 + 75$, άρα έχουμε

$100 + 25 \cdot 0{,}32 = \upsilon'^2 + 0{,}32 \cdot \omega'^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 108 = \upsilon_x'^2 + 75 + 0{,}32 \cdot \left(\dfrac{3-\upsilon_x'}{0{,}4}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 108 = \upsilon_x'^2 + 75 + 2 \cdot (3 - \upsilon_x')^2$

$\Rightarrow 108 = \upsilon_x'^2 + 75 + 2 \cdot (9 + \upsilon_x'^2 - 6 \cdot \upsilon_x') \Rightarrow 15 = \upsilon_x'^2 + 2\upsilon_x'^2 - 12\upsilon_x'$

$\Rightarrow 3\upsilon_x' - 12\upsilon_x' - 15 = 0 \Rightarrow \upsilon_x' - 4\upsilon_x' - 5 = 0 \Rightarrow \upsilon_x' = -1$m/s και

$\varepsilon\varphi\theta = 5\sqrt{3}$

Τότε είναι $\omega' = \dfrac{3-\upsilon_x'}{0{,}4} = 10$rad/s.

ii) Α.Δ.Σ:

$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $m \cdot \upsilon \cdot \eta\mu 30^0 (L_1+L_2) - I \cdot \omega = I_{o\lambda} \cdot \omega_\kappa$

όπου $I_{o\lambda} = I + m(L_1+L_2)^2 = 0{,}32 + 0{,}64 = 0{,}96 Kg \cdot m^2$

$\Rightarrow 4 - 0{,}32 \cdot 5 = 0{,}96 \cdot \omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa = 2{,}5$rad/s. Τότε η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της μάζας m, τη στιγμή της μέγιστης ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης θα είναι $\upsilon_{x\kappa} = \omega_\kappa \cdot (L_1+L_2) \Rightarrow \upsilon_{x\kappa} = 2$m/s, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα είναι σταθερή και ίση με $\upsilon_{y\kappa} = \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 5\sqrt{3}$ m/s. Η ολική ταχύτητα της μάζας m είναι $\upsilon_\kappa^2 = \upsilon_{x\kappa}^2 + \upsilon_{y\kappa}^2 = 79 \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon_\kappa = \sqrt{79}$ m/s.

Τότε $K_{\alpha\rho\chi} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 + \dfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = 50 + 0{,}16 \cdot 25 = 54$J και τη στιγμή της μέγιστης παροδικής παραμόρφωσης θα είναι

$K = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_\kappa^2 + \dfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_\kappa^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 79 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}32 \cdot 6{,}25 = 39{,}5 + 1 = 40{,}5$J. Τότε η μέγιστη ενέργεια παροδικής παραμόρφωσης είναι $Q = 54 - 40{,}5 = 13{,}5$J.

ε) Για τη γραμμική ταχύτητα του Κ.Μ του συστήματος που βρίσκεται στο σημείο Β, είναι $\upsilon = \omega' \cdot L_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2$m/s και η κεντρομόλος επιτάχυνση του Κ.Μ είναι $\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{L_1} = 20$m/s^2.

Άρα $N - (m_1+m_2) \cdot g = (m_1+m_2) \cdot \alpha_\kappa \Rightarrow N = 40 + 80 \Rightarrow N = 120$N.

Ακόμη για τη γραμμική ταχύτητα του Κ.Μ της m_1, είναι $\upsilon_1=\omega'\cdot\frac{L_1}{2}=10\cdot 0{,}1=1m/s$ και η κεντρομόλος επιτάχυνση του Κ.Μ είναι $\alpha_\kappa=\frac{\upsilon_1^2}{L_1/2}=10m/s^2$ και

$F_{k1}=m_1\cdot\alpha_\kappa=3\cdot 10=30N$.

Παρόμοια για τη μάζα m_2, είναι $\upsilon_2=\omega'\cdot(L_1+\frac{L_2}{2})=10\cdot 0{,}5=5m/s$ και η κεντρομόλος επιτάχυνση του Κ.Μ είναι $\alpha_\kappa=\frac{\upsilon_2^2}{L_1+(L_2/2)}=50\ m/s^2$ και

$F_{k2}=m_2\cdot\alpha_\kappa=1\cdot 50=50\ N$. Τότε $N-(m_1+m_2)\cdot g=F_{k1}+F_{k2}\Rightarrow N=40+30+50\Rightarrow$
$\Rightarrow N=120N$.